TRIGONOMÉTRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

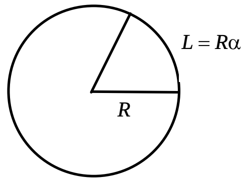
I) Le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians.

Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α (en radians) a pour longueur : $L = \alpha R$

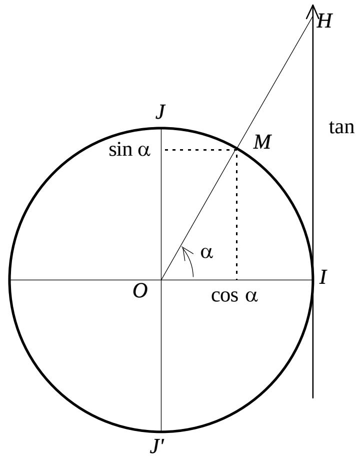
Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de α radians (ou inversement).

degrés	180	x
radians	π	α



Exemple : convertir 60° en radians : cela donne $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

II) Cercle trigonométrique et définition du sinus, du cosinus et de la tangente



Munissons le plan d'un repère orthonormé (O ; I, J). Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct (sens contraire des aiguilles d'une montre). Soit M un point du cercle tel que α soit une mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Définition du sinus et du cosinus :

On appelle cosinus et sinus de α, et on note cos α et sin α, les coordonnées du point M dans le repère (O ; I, J) : $\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OI} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OJ}$.

Définition de la tangente :

Soit Δ la droite (verticale) d'équation $x = 1$ dans le repère (O ; I, J) et H le point défini par $(OM) \cap \Delta$.

Ce point H existe dès lors que Δ et (OM) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire dès que M n'est ni en $J(0 ; 1)$, ni en $J'(0 ; -1)$, c'est-à-dire dès que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

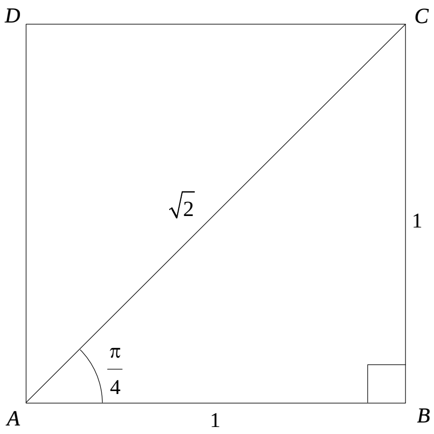
On appelle tangente de α, et on note tan α, l'ordonnée du point H dans le repère (O ; I, J)

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente pour des valeurs particulières de l'angle α (en radians) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

Démonstration :

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$, on exploite la diagonale du carré (de côté 1) :

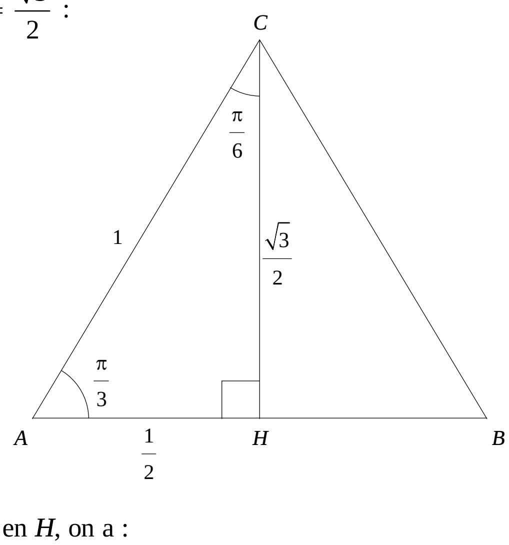


Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{BC}{AB}=1$$

Pour calculer les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on exploite naturellement la configuration du triangle équilatéral de côté 1 avec une de ses hauteurs qui au passage d'après le théorème de Pythagore mesure $\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

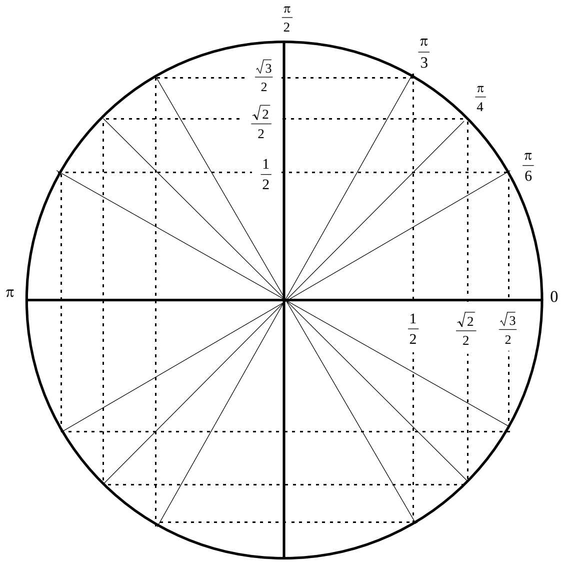


Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{AH}{AC}=\frac{1}{2}\ ;\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \tan\frac{\pi}{6}=\frac{AH}{CH}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{CH}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{AH}{AC}=\frac{1}{2}\ ;\ \tan\frac{\pi}{3}=\frac{CH}{AH}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

Pour les autres cas d'angles remarquables, on retrouve les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente par symétrie comme l'illustre le cercle[1] ci-dessous :



Propriétés élémentaires du sinus et du cosinus :

$$\mathbf{\cos(x + 2k\pi) = \cos x}$$

$$\mathbf{\sin(x + 2k\pi) = \sin x}$$

$$\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\mathbf{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

$$\mathbf{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$$

Exercice : sachant que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.

C'est un exercice qui n'est pas si simple ! Déjà, nous disposons d'une relation entre le sinus et le cosinus :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

En particulier, avec $x = \frac{\pi}{12}$: $\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$

Calculons $\cos^2\frac{\pi}{12}$: $\cos^2\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

D'où : $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

(Remarque : $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ est bien un nombre positif puisque $2 > \sqrt{3}$)

Tenant compte de la relation $\sqrt{A^2} = |A|$, nous obtenons :

$$\left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Or, $\sin\frac{\pi}{12} \geqslant 0$ car $\frac{\pi}{12} \in [0\,;\,\pi]$. Donc : $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

Enfin, n'y a-t-il pas une écriture plus simple ?

Dans ce cas, oui ! En effet : $4 - 2\sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = (1-\sqrt{3})^2$

Donc : $2 - \sqrt{3} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}$

Et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{2}}$

Et comme $\sqrt{3} > 1$: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

[1] Pour un cercle trigonométrique complet, voir : http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursP_fichiers/cercle.pdf

III) Fonctions sinus et cosinus

Rappel : une fonction f est dite périodique, de période T si pour tout réel x on a : $f(x + T) = f(x)$.

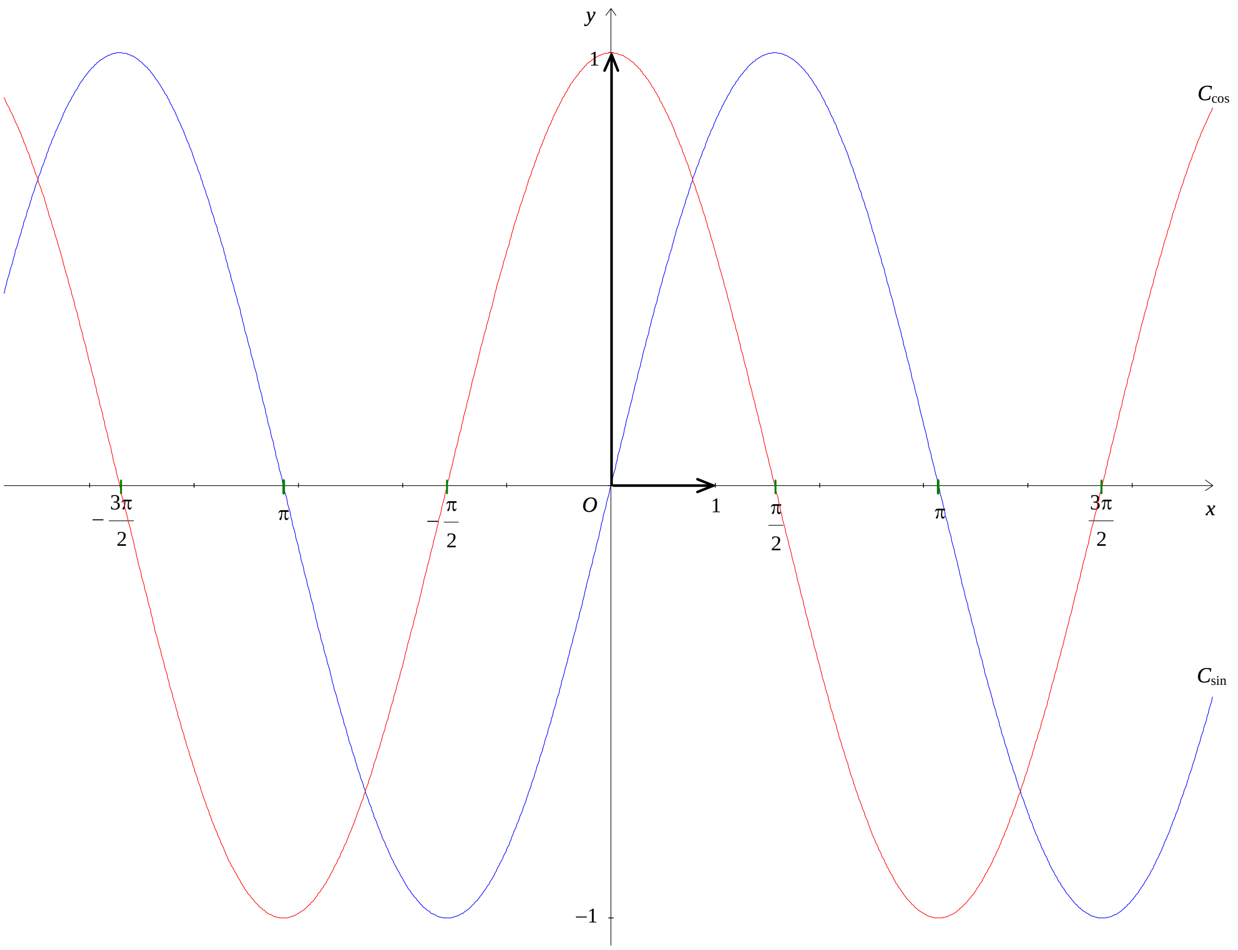
Notons que si T est une période, tout multiple de T en est une autre :

$$\ldots = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = \ldots$$

Pour étudier (ou tracer) une fonction périodique, on se limite à une période.

Théorème : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. De plus, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ($\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$)

Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus :



Les courbes ci-dessus sont appelées des sinusoïdes.

Exercice : dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, et le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

IV) Relations entre le sinus et le cosinus

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver[1] les relations suivantes :

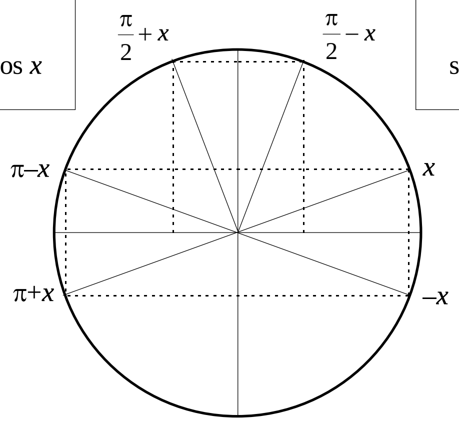
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$



Exercice : simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi - x)$; $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$

V) Fonction tangente

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. On appelle tangente de x le réel noté **tan** x et défini par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

De ce fait, $\tan x$ est définie lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (où k est un entier relatif).

Exercice 1 : Calculer $\tan x$ pour $x = \dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{12}$. (Voir ci-dessus pour les valeurs de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$)

Exercice 2 : Soit x un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ tel que $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

VI) Fonctions dérivées des fonctions circulaires

Fonction	Dérivée
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\omega \cos(\omega t + \varphi)$

Fonction	Dérivée
$\cos(\omega t + \varphi)$	$-\omega \sin(\omega t + \varphi)$
$\tan t$	$1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

Exercice 1 : en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, démontrer le résultat ci-dessus concernant la dérivée de la fonction tangente.

Exercice 2 : dériver les fonctions suivantes : $f(x) = \sin 2x$; $g(x) = 2 \sin x \cos x$; $h(x) = \sin^2 x$

[1] Pour un démonstration, voir ce document : http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursP_fichiers/relametr.pdf

VII) Formulaire de trigonométrie[1]

Formules d'addition

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Formules de duplication

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Formules de linéarisation

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Exercice 1 : calculer $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$ à l'aide de l'égalité $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ et des formules d'addition.

Exercice 2 : calculer $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$ à l'aide des formules de linéarisation.

VIII) Résolution des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ($x \in \mathbb{R}$)

Si $a \notin [-1 ; 1]$ alors ces équations n'ont pas de solutions (car $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$)

Si $a \in [-1 ; 1]$, elles en ont une infinité :

Pour $\cos x = a$: on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $-\alpha$ dont le cosinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Pour $\sin x = a$: on résout déjà l'équation sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ en cherchant à l'aide du cercle trigonométrique les deux angles α et $\pi - \alpha$ dont le sinus vaut a. On trouve les autres solutions de l'équation en ajoutant les multiples de 2π.

$$\boxed{\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x = -0{,}5 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \ ;\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \ ;\ 2\sin(3x) = 1 \text{ pour } x \in [0 ; 6\pi].$$

[1] Pour un démonstration, voir ce document : http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/Lycee_fichiers/CoursP_fichiers/relametr.pdf

IX) Coordonnées polaires

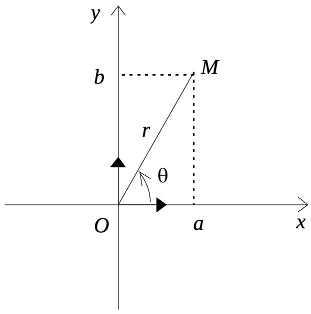
Soit M un point du plan représenté par des coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Les coordonnées (a, b) sont dites cartésiennes ou rectangulaires.

Supposons $M \neq O$ et notons r la distance OM et θ l'angle $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$.

Le couple [r, θ] est appelé couple de coordonnées polaires du point M.

$$\boxed{\begin{array}{c} r^2 = a^2 + b^2 \\ a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array}}$$



Les relations ci-dessus permettent de convertir les coordonnées polaires en cartésiennes et vice-versa.

Exemples :

1. Soit $M\left[2\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$. Déterminer les coordonnées cartésiennes (a, b) de M :

$$a = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$b = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Les coordonnées cartésiennes de M sont : $\left(1\ ;\sqrt{3}\right)$

2. Soit $N(2\ ;\ -2)$. Déterminer les coordonnées polaires [r, θ] de N :

$$r^2 = a^2 + b^2 = 8$$

Et comme $r > 0$: $r = 2\sqrt{2}$

D'où : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Par lecture du cercle trigonométrique, on a : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

D'où : $N\left[2\sqrt{2}\ ;\ -\dfrac{\pi}{4}\right]$